На правах рукописи

Тихонова Ольга Александровна

ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА И РЕШЕНИЕ В КВАДРАТУРАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАРШИМИ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2010

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Жегалов Валентин Иванович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Зайцев Валентин Федорович**
	доктор физико-математических наук, профессор **Хайруллин Равиль Сагитович**
Ведущая организация:	Белгородский государственный университет

Защита состоится « 30 » сентября 2010 года в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при КФУ, расположенном по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке им. Н. И. Лобачевского ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Автореферат разослан « 3 » июля 2010 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент Липачев Е. К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В работе рассматриваются уравнения вида

$$\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n}u(x)}{\partial {x_1}^{m_1}\ldots\partial {x_n}^{m_n}} + Mu(x) = f(x), \qquad (1)$$

где M — линейный дифференциальный оператор с достаточно гладкими переменными коэффициентами, содержащий лишь производные, получаемые из первого слагаемого в левой части (1) отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования.

Первые исследования уравнений данного класса возникли в результате теоретического обобщения: итальянские математики Л. Бианки и О. Никколетти разработали вариант распространения на эти уравнения метода решения задачи Коши, предложенного в свое время Б. Риманом для хорошо известного в математической физике уравнения $u_{xy}+au_x+bu_y+cu=f$. При этом оба указанных автора рассматривали частный случай $m_k = 1$, $k=\overline{1,n}$, при любом $n \in \mathbb{N}$.

Впоследствии уравнения (1), в том числе для $m_k > 1$, с различных точек зрения изучали Г. Бейтмен, Е. Лаэ, Г. Горнич, Д. Манжерон, М. Огюсторели, Д. Колтон, С. Еасваран, В. Радочова, А. Кордунеану, У. Ранделл, М. Стечер, И. Н. Векуа, М. К. Фаге, А. П. Солдатов, М. Х. Шхануков, Б. А. Бондаренко, Г. У. Саидкаримова, В. И. Жегалов, В. А. Севастьянов, А. Н. Миронов, Е. А. Уткина, В. Ф. Волкодавов, О. М. Джохадзе и другие авторы. При этом выяснилось, что частные случаи указанных уравнений встречаются в теории упругости, при изучении фильтрации жидкости в трещиноватых породах, влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенных средах, моделировании различных биологических процессов и явлений, распространении волн в диспергирующих средах, а также в теории оптимальных процессов и обратных задачах. Имеются и чисто математические вопросы, связанные с уравнениями (1): они играют существенную роль в теории аппроксимации и теории отображений, к задаче Коши для частных форм (1) сводится задача интегрального представления преобразований одних обыкновенных линейных дифференциальных операторов в другие.

При $m_k = 1$, $k = \overline{1,n}$ обсуждаемые уравнения называются сейчас именем Л. Бианки, а в общем случае (при наличии $m_k > 1$) — псевдопараболическими уравнениями.

В теории дифференциальных уравнений с самого начала её возникновения значительное внимание уделялось отысканию случаев понижения порядка уравнений и построению их решений в явном виде (в квадратурах). Особенно интенсивно этот аспект развивался в области обыкновенных дифференциальных уравнений: многочисленные результаты отражены в широкоизвестных справочниках Э. Камке, В. Ф. Зайцева и А. Д. Полянина. В значительно более обширной теории уравнений с частными производными подобные вопросы разработаны менее основательно, что послужило причиной для выбора темы предлагаемого диссертационного исследования.

Цель работы и методы исследования. Мы отыскиваем условия, накладываемые на коэффициенты уравнений вида (1), достаточные для понижения порядка этих уравнений или решения их в квадратурах. Разрабатываются три подхода: изучение возможностей факторизации оператора в левой части уравнения; вывод новых вариантов условий, обеспечивающих построение функций Римана в явном виде; развитие метода каскадного интегрирования (Лапласа). В первом подходе эвристические соображения комбинируются с методом математической индукции. Во втором речь идёт об уравнениях Бианки: полученные ранее результаты для числа измерений $n \leqslant 3$ распространяются на случаи $n \geqslant 4$. Все рассуждения здесь тесно связаны с методом Римана, при этом используются результаты теории обобщенных гипергеометрических функций. Наконец, каскадный метод развивается с целью распространения рассуждений Лапласа с уравнения $u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f$ на его трёхмерный аналог.

Научная новизна. Она содержится как в разрабатываемой методике, так и в результатах, основными из которых являются:

1. Для уравнения общего вида на основе факторизации оператора в левой его части разработаны различные варианты понижения порядка: от понижения на единицу до решения в квадратурах.

2. Для уравнения Бианки метод построения в явном виде функции Римана распространён с трёхмерного пространства в n-мерное.

3. Разработан трёхмерный вариант метода каскадного интегрирования, на основе которого выделено значительное число новых случаев интегрирования рассматриваемого уравнения в квадратурах.

4. Для общего псевдопараболического уравнения четвёртого порядка с двукратным дифференцированием старшей производной по каждой из двух независимых переменных выделены случаи построения решений задач Гурса и Коши в явном виде.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы для изучения возможностей решения в явном виде более сложных уравнений.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях: Третья молодёжная научная школа-конференция «Лобачевские чтения — 2003» (Казань, 2003 г.); итоговая конференция по научно-исследовательской деятельности КГУ за 2005 год (Казань, 2006 г.); международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2006 г.); конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Самара, 2007 г.); Восьмая международная Казанская летняя научная школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» (Казань, 2007 г.); Шестая молодёжная научная школа-конференция «Лобачевские чтения — 2007» (Казань, 2007 г.); Седьмая молодёжная научная школа-конференция «Лобачевские чтения — 2008» (Казань, 2008 г.); Девятая международная Казанская летняя научная школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» (Казань, 2009 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах, из них три статьи опубликованы в журналах из перечня ВАК. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, которые разбиты на восемь параграфов и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 123 страницы. Список литературы содержит 69 наименований, включая работы автора.

Краткое содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулированы цель и задачи диссертационной работы, перечислены полученные в диссертации новые результаты и описана структура диссертации.

В первой главе «Понижение порядка путем факторизации с применением к решению гарничных задач», состоящей из трёх параграфов, для проводимых рассуждений оказывается удобным ввести обозначения

$$u_{(i_1\ldots i_n)} = \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n} u}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}},$$

$$\left[\sum\right] = \sum_{\substack{i_k=0,1,\, k=\overline{1,n}\\ i_1+\ldots+i_n<n}},$$

$$(i_1,\ldots,k,\ldots,i_n) = (i_1,\ldots,i_{j-1},k,i_{j+1},\ldots,i_n),$$

$$\left[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\right]=\sum_{\substack{i_k=\overline{0,m_k},k=\overline{1,n}\\ i_1+\ldots+i_n<m_1+\ldots+m_n}}.$$

Первый параграф этой главы посвящен уравнениям Бианки, рассматриваемым в некоторой области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, которые в указанных обозначениях принимают вид

$$u_{(1\ldots1)}+\left[\sum\right]\,a^{(i_1\ldots i_n)}\,u_{(i_1\ldots i_n)}=f. \tag{2}$$

Здесь изучен вариант с понижением порядка на k единиц (при этом сначала в качестве вспомогательного излагается случай $k=1$). Доказаны две теоремы:

Теорема 1.1. *Если при некотором* $j\in\mathbb{N}$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ *коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условиям* $\frac{\partial^{i_j}a^{(i_1\ldots i_n)}}{\partial x_j^{i_j}}(x)$, $f(x)\in\mathrm{C}(D)$ *и выполняются тождества*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}a^{(i_1\ldots1\ldots i_n)}-a^{(i_1\ldots0\ldots i_n)}+a^{(1\ldots0\ldots1)}\,a^{(i_1\ldots1\ldots i_n)}\equiv0,$$

$i_l=0,1,\ l=\overline{1,n},\ l\neq j,\ i_1+\ldots+i_{j-1}+i_{j+1}+\ldots+i_n<n-1,$ *то (2) эквивалентно уравнению*

$$u_{(1\ldots0\ldots1)}+\left[\sum\right]\,a^{(i_1\ldots1\ldots i_n)}\,u_{(i_1\ldots0\ldots i_n)}=u_1,$$

где $u_1=\exp\left[-\int\limits_{x_j{}^0}^{x_j}a^{(1\ldots0\ldots1)}(x_1,\ldots,\xi,\ldots,x_n)\,d\xi\right]\left(\int\limits_{x_j{}^0}^{x_j}f(x_1,\ldots,\xi,\ldots,x_n)\times\right.$
$\left.\times\exp\left[\int\limits_{x_j{}^0}^{\xi}a^{(1\ldots0\ldots1)}(x_1,\ldots,\eta,\ldots,x_n)\,d\eta\right]d\xi+\omega(x_1,\ldots,x_{j-1},\,x_{j+1},\ldots,x_n)\right)$, *а* $\omega(x_1,\ldots,x_{j-1},\,x_{j+1},\ldots,x_n)$ *— произвольная функция.*

Теорема 1.2. *Если при некотором* $k\in\mathbb{N}\,(1<k<n)$ *коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условиям* $\frac{\partial^{i_j}a^{(i_1\ldots i_n)}}{\partial x_j^{i_j}}(x)$, $f(x)\in\mathrm{C}(D)$ *и выпол-*

няются тождества

$$-\sum_{\substack{i'_j=\overline{i_j,1}\\ j=\overline{1,k}}} a^{(1\ldots 1 i_{k+1}\ldots i_n)}_{(i'_1-i_1\ldots i'_k-i_k 0\ldots 0)} a^{(i'_1\ldots i'_k 1\ldots 1)} + a^{(i_1\ldots i_n)} \equiv 0,$$

$$i_l = 0,1,\ l=\overline{1,n},\ i_1+\ldots+i_k<k,\ i_{k+1}+\ldots+i_n<n-k,$$

то оно равносильно системе двух уравнений

$$u_{k(\underbrace{1\ldots 1}_{k}0\ldots 0)} + \left[\sum\right] a^{(i_1\ldots i_k 1\ldots 1)}\, u_{k(i_1\ldots i_k 0\ldots 0)} = f,$$

$$u_k = u_{(\underbrace{0\ldots 0}_{k}1\ldots 1)} + \left[\sum\right] a^{(1\ldots 1 i_{k+1}\ldots i_n)} u_{(0\ldots 0 i_{k+1}\ldots i_n)}$$

порядков k и $n-k$ соответственно.

Получена также рекуррентная формула для определения количества вариантов наборов тождеств, выполнение которых приводит к полной факторизации уравнения.

В §2 рассматривается общее уравнение (1), принимающее в наших обозначениях вид

$$u_{(m_1\ldots m_n)} + [\sum_{\substack{i_j=\overline{0,m_j}\\ j=\overline{1,n}}}] a^{(i_1\ldots i_n)}\, u_{(i_1\ldots i_n)} = f,\ m_1+\ldots+m_n=r. \tag{3}$$

Изучается тоже два варианта понижения порядка: на единицу и на величину порядка дифференцирования по одной из переменных. Результатом проведенных рассуждений является

Теорема 2.1. *Если при некотором $j\in\mathbb{N}\,(1\leqslant j\leqslant n)$, таком что $m_j\geqslant 1$, коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют условиям $\frac{\partial^{i_j} a^{(i_1\ldots i_n)}}{\partial x_j^{i_j}}(x)$, $f(x)\in \mathrm{C}(D)$ и выполняются тождества*

$$\sum_{k=0}^{m_j}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial {x_j}^k}\, a^{(i_1\ldots i_{j-1} k\, i_{j+1}\ldots i_n)} \equiv 0, \sum_{k=0}^{m_j-1}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial {x_j}^k}\ a^{(m_1\ldots m_{j-1} k\, m_{j+1}\ldots m_n)} \equiv 0,$$

$i_l = \overline{0, m_l}$, $l = \overline{1, n}$, $l \neq j, i_1 + \ldots + i_{j-1} + i_{j+1} + \ldots + i_n < r - m_j$, *то (1) эквивалентно уравнению*

$$u_{(m_1 \ldots m_{j-1} m_j - 1\, m_{j+1} \ldots m_n)} + \\ + \sum_{k=0}^{m_j - 1} \left[\sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_j=0}^{m_j-k-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n} \right] (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial {x_j}^k} a^{(i_1 \ldots i_{j-1}\, i_j+k+1\, i_{j+1} \ldots i_n)}\, u_{(i_1 \ldots i_n)} = \\ = \int\limits_{x_j^0}^{x_j} f\, dx_j + c(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

где $c(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ *— произвольная функция.*

Теорема 2.2. *Если при некотором* $j \in \mathbb{N}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, *таком что* $m_j \geqslant 1$, *коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют условиям* $\frac{\partial^{i_j} a^{(i_1 \ldots i_n)}}{\partial x_j^{i_j}}(x)$, $f(x) \in \mathrm{C}(D)$ *и выполняются тождества*

$$a^{(i_1 \ldots i_n)} - C_{m_j}^{i_j} \frac{\partial^{m_j - i_j}}{\partial x_j^{m_j - i_j}}\, a^{(i_1 \ldots m_j \ldots i_n)} - \sum_{i=i_j}^{m_j - 1} a^{(m_1 \ldots i \ldots m_n)} C_i^{i_j} \frac{\partial^{i - i_j}}{\partial x_j^{i - i_j}}\, a^{(i_1 \ldots m_j \ldots i_n)} \equiv 0,$$

$i_l = \overline{0, m_l}$, $l = \overline{1, n}$, $l \neq j$, $i_j = \overline{0, m_j - 1}$, $i_1 + \ldots + i_{j-1} + i_{j+1} + \ldots + i_n < r - m_j$, *то уравнение принимает вид*

$$u_{(m_1 \ldots 0 \ldots m_n)} + \left[\sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n} \right] a^{(i_1 \ldots m_j \ldots i_n)}\, u_{(i_1 \ldots 0 \ldots i_n)} = v,$$

где функция v *является решением уравнения*

$$\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}\, v + \sum_{i_j=0}^{m_j - 1} a^{(m_1 \ldots i_j \ldots m_n)} \frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}\, v = f. \tag{4}$$

Отдельно изучается уравнение (4). В частности, для него доказаны три теоремы. Приведём одну из них.

Теорема 2.5. *Если коэффициенты уравнения (4) удовлетворяют усло-*

виям $\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}\, a^{(m_1\ldots i_j\ldots m_n)} \in C(D),\ i_j=\overline{0,m_j-1}$ *и выполняются тождества*

$$\sum_{k=0}^{m_j-t-1} (-1)^k C_{k+t}^t \frac{\partial^k}{\partial x_j^k} a^{(m_1\ldots k+t\ldots m_n)} \equiv 0, \quad t=\overline{0,m_j-2},$$

то решение для (4) находится из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_j} v + a^{(m_1\ldots m_j-1\ldots m_n)}\, v =$$

$$= \frac{1}{(m_j-2)!} \int\limits_{x_j^0}^{x_j} (x_j-\tau)^{m_j-2} f(x_1,\ldots,x_{j-1},\tau,x_{j+1},\ldots,x_n)\, d\tau + \sum_{s=0}^{m_j-2} x_j^s\, A_s,$$

где $A_s \equiv A_s(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n)$, $s=\overline{0,m_j-2}$ *— произвольные функции.*

В §3 полученные результаты применяются к решению задач Гурса и Коши для общего уравнения со старшей производной $u_{x_1x_1x_2x_2}$. Сначала в терминах коэффициентов уравнения построены 8 наборов тождеств (по 6 штук в каждом наборе). Каждый из упомянутых наборов обеспечивает разрешимость уравнения в квадратурах. Указано как можно получить ещё 8 наборов, играющих ту же роль, а также для каждого набора строится общее представление решений, позволяющее построить решение соответствующей задачи. Фактически все это есть описание процедуры получения формул этого решения. Представленное в достаточно сжатой форме это описание занимает порядка 20 страниц.

Во второй главе «Условия построения в явном виде функции Римана для уравнения Бианки в пространствах размерности $n \geqslant 4$» исходным моментом послужил способ построения функции Римана, предложенный В. И. Жегаловым в случае трехмерного уравнения Бианки.

В §4 этот результат распространяется в четырёхмерное пространство, когда уравнение имеет вид

$$u_{xyzt} + au_{xyz} + bu_{xyt} + cu_{xzt} + du_{yzt} + eu_{xy} + fu_{xz} + gu_{xt} +$$
$$+ hu_{yz} + ku_{yt} + su_{zt} + mu_x + nu_y + pu_z + qu_t + ru = 0. \quad (5)$$

Здесь существенную роль играют конструкции

$$\begin{aligned}
&h_{1,4} \equiv d_t + ad - h, && h_{2,4} \equiv c_t + ac - f,\\
&h_{3,4} \equiv b_t + ab - e, && h_{1,3} \equiv d_z + bd - k,\\
&h_{2,3} \equiv c_z + bc - g, && h_{1,2} \equiv d_y + cd - s,\\
&h_{12,4} \equiv s_t + as - p, && h_{13,4} \equiv k_t + ak - n,\\
&h_{23,4} \equiv g_t + ag - m, && h_{12,3} \equiv s_z + bs - q.
\end{aligned}$$

Доказана следующая теорема:

Теорема 4.1. *Если для уравнения (5) выполнены условия*

$$h_{1,4} \equiv h_{2,4} \equiv h_{3,4} \equiv h_{1,3} \equiv h_{2,3} \equiv h_{1,2} \equiv h_{12,4} \equiv h_{13,4} \equiv h_{23,4} \equiv h_{12,3} \equiv 0,$$

$$q_t + aq - r = \theta_1(x)\theta_2(y)\theta_3(z)\theta_4(t)$$

и существует непрерывно дифференцируемая по всем переменным в $\overline{D}$ функция $G(x, y, z, t)$, такая что имеют место представления

$$a(x,y,z,t) = \frac{\partial G}{\partial t},\ b(x,y,z,t) = \frac{\partial G}{\partial z},\ c(x,y,z,t) = \frac{\partial G}{\partial y},\ d(x,y,z,t) = \frac{\partial G}{\partial x},$$

то функция Римана для уравнения (5) строится в явном виде.

В §5 той же главы аналогичная теорема доказана для любого конечного числа измерений (теорема 5.1).

Знание функции Римана позволяет в явном виде записать решение задачи Гурса, которое при произвольных граничных значениях можно рассматривать как общее представление решений соответствующего уравнения. Таким образом, содержащиеся в теоремах 4.1 и 5.1 условия на коэффициенты уравнения фактически обеспечивают его разрешимость в квадратурах.

Третья глава «Развитие метода каскадного интегрирования» посвящена распространению рассуждений, реализуемых в каскадном методе для гиперболических уравнений второго порядка, на случай уравнений третьего порядка. Мы рассматриваем уравнение

$$\sum_{\substack{i_k=\overline{0,1}\\ k=\overline{1,3}}} a^{(i_1 i_2 i_3)}(x)\, u_{(i_1 i_2 i_3)}(x) = f, \tag{6}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $a^{(111)}(x) \equiv 1$. Разработанный вариант даёт увеличение числа уравнений вида (6) на каждом шаге процесса в шесть раз. Вместе с (6) множество указанных уравнений составляет каскад, называемый нами основным. При этом вместе с каждым новым уравнением третьего порядка возникает новое уравнение второго порядка (по двум переменным, выбираемым из x_1, x_2, x_3). Совокупность всех таких уравнений тоже рассматривается как каскад, называемый сопутствующим.

Из основного каскада выделены три последовательности уравнений, для которых удаётся построить (и это делается в работе) рекуррентные соотношения для вычисления конструкций, играющих в нашей ситуации роль инвариантов Лапласа. В терминах этих конструкций доказаны шесть теорем о теоретически возможных условиях понижения порядка какого-либо уравнения из упомянутых трёх последовательностей. Однако, как и в классическом варианте, подобные случаи носят исключительный характер: доказанные теоремы фактически лишь утверждают, что желаемое понижение порядка при определённых условиях произойдёт, но не гарантируют, что формулируемые условия обязательно возникнут в процессе построения каскада.

Попутно с вышеуказанными рассуждениями предложен алгоритм, позволяющий выделять из уравнений данного вида бесконечную цепочку уравнений, наверняка разрешимых в квадратурах. Но чтобы фактически построить такую цепочку, надо иметь хотя бы одно разрешимое в квадратурах уравнение.

Более определенные возможности решения исходного уравнения в квадратурах удаётся обнаружить при исследовании сопутствующего каскада. Одна из таких возможностей связана с выполнением соотношений

$$a^{(101)} = \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a_{x_2}^{(110)}(x_1, x_2, \tau) - \varphi(x_1, x_2)\psi(x_1, \tau)\Big)\, d\tau + \omega(x_1, x_2),$$

$$a^{(100)} = a_{x_2}^{(110)} + a^{(110)}\Big(\int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a_{x_2}^{(110)}(x_1, x_2, \tau) - \varphi(x_1, x_2)\psi(x_1, \tau)\Big)\, d\tau +$$
$$+\omega(x_1, x_2)\Big) - 2\varphi(x_1, x_2)\psi(x_1, x_3),$$
$$a^{(010)} = a_{x_1}^{(110)} + a^{(110)}a^{(011)},$$

$$a^{(001)} = \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a_{x_1x_2}^{(110)}(x_1, x_2, \tau) - (\varphi(x_1, x_2)\psi(x_1, \tau)_{x_1})\Big)\, d\tau + \omega_{x_1}(x_1, x_2) +$$
$$+a^{(011)}\Big(\int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a_{x_2}^{(110)}(x_1, x_2, \tau) - \varphi(x_1, x_2)\psi(x_1, \tau)\Big)\, d\tau + \omega(x_1, x_2)\Big),$$

$$a^{(000)} = a_{x_1x_2}^{(110)} + \Bigg(a^{(110)}\Big(\int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a_{x_2}^{(110)}(x_1, x_2, \tau) - \varphi(x_1, x_2)\psi(x_1, \tau)\Big)\, d\tau +$$
$$+\omega(x_1, x_2)\Big)\Bigg)_{x_1} - 2(\varphi(x_1, x_2)\psi(x_1, x_3))_{x_1} +$$
$$+a^{(011)}\Bigg(a_{x_2}^{(110)} + a^{(110)}\Big(\int\limits_{x_3^0}^{x_3} \Big(a_{x_2}^{(110)}(x_1, x_2, \tau) - \varphi(x_1, x_2)\psi(x_1, \tau)\Big)\, d\tau +$$
$$+\omega(x_1, x_2)\Big) - 2\varphi(x_1, x_2)\psi(x_1, x_3)\Bigg). \qquad (7)$$

Здесь φ, ψ, ω — произвольные функции (из определённых классов). Непосредственно видно, что эти формулы фактически есть представления через произвольные функции φ, ψ, ω и коэффициенты $a^{(110)}$, $a^{(011)}$ всех остальных коэффициентов рассматриваемого уравнения. Таким образом, задавая $a^{(110)}$, $a^{(011)}$, а также φ, ψ, ω, мы каждый раз найдем все коэффициенты уравнения (6), для которых это уравнение разрешимо в квадратурах. Другими словами, мы получаем параметрические представления (роль параметров играют функции) для коэффициентов уравнения (6), при выполнении которых оно разрешимо в квадратурах. Мы называем соотношения типа (7) структурными формулами.

В §8 третьей главы выведены ещё 23 набора структурных формул, играющих ту же роль, что (7), то есть в совокупности получается 24 варианта наборов, каждый из которых гарантирует разрешимость в квадратурах уравнения (6).

Автор искренне благодарна своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Валентину Ивановичу Жегалову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК РФ

1. Жегалов, В.И. Понижение порядка одного класса уравнений с частными производными / В. И. Жегалов, О. А. Кощеева // Доклады РАН, 2006. – Т. 406, № 5. – С.593–597.

2. Кощеева, О. А. Об условиях понижения порядка линейных уравнений со старшими частными производным / О. А. Кощеева // Изв. вузов. Математика. – 2007. –№ 6. – С. 45–54.

3. Кощеева, О. А. О построении функции Римана для уравнения Бианки в n-мерном пространстве / О. А. Кощеева // Изв. вузов. Математика. – 2008. – № 9. – С. 40–46.

Публикации в других изданиях

4. Кощеева, О. А. Понижение порядка одного уравнения в частных производных / О. А. Кощеева. – Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань, 2003. – Т. 21. – С. 140–142.

5. Жегалов, В. И. Понижение порядка линейный уравнений, разрешенных относительно старшей частной производной / В. И. Жегалов, О. А. Кощеева. – Сб. материалов итоговой конференции по научно-исследовательской деятельности КГУ за 2005 г. – Ч. I. Естественные науки. – Казань, 2006. – С. 86–87.

6. Кощеева, О.А. О построении функции Римана для уравнения Бианки в четырехмерном пространстве / О. А. Кощеева. – Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу Н. В. Ефимова. – Ростов-на-Дону, 2006. – С. 236–238.

7. Кощеева, О. А. Один случай построения функции Римана для уравнения Бианки / О. А. Кощеева. – Тез. докл. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Самара: изд-во «Универс. групп», 2007. – С. 68–71.

8. Кощеева, О. А. Решение в квадратурах задачи Гурса для псевдопараболического уравнения четвертого порядка / О. А. Кощеева. – Материалы Восьмой международной Казанской летней научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». – Казань, 2007. – С. 138–140.

9. Тихонова, О. А. О конструктивном решении одной задачи Коши / О. А. Тихонова. – Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань, 2007. – Т. 36. – С. 50–52.

10. Жегалов, В. И. Метод каскадного интегрирования в трехмерном пространстве / В. И. Жегалов, О. А. Тихонова. – Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань, 2008. – Т. 37. – С. 50–52.

11. Тихонова, О. А. Случаи факторизации уравнения Бианки n-го поряд-

ка / О. А. Тихонова. – Материалы Девятой международной Казанской летней научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». – Казань, 2009. – С. 280–281.

12. Жегалов, В. И. Каскадное интегрирование уравнений Бианки третьего порядка / В. И. Жегалов, О. А. Тихонова; Препринт НИИММ им. Н. Г. Чеботарева. – Казан. гос. ун-т. – 2010. – 41 с.

Публикации [1, 5, 10, 12] выполнены в соавторстве с научным руководителем, которому принадлежат постановки задачи и общие рекомендации о возможных путях их исследования.

Подписано к печати 1.07.2010 г.

Тираж 100 экз. Заказ 7/3.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ООО «Веда».

420021, г. Казань, ул.Габдуллы Тукая, 113а.

Тел. (843) 278-96-96.